**Đa thức nội suy Newton**

**I.Nội suy Newton là gì ?**

Giả sử chúng ta có đa thức sau đây

P(x)=2−3x+3

Cho x một vài giá trị, chúng ta tính được giá trị của P(x) như sau

P(1)=2−3+3=2,

P(2)=8−6+3=5,

P(3)=18−9+3=12

Câu hỏi đặt ra là, **nếu ngược lại**, chúng ta biết được

P(1)=2, P(2)=5, P(3)=12,

liệu chúng ta có thể **tìm lại được đa thức P(x)** hay không?

Câu trả lời là được**. Công thức đa thức nội suy giúp cho chúng ta tìm lại được đa thức P(x)**

Bài toán : Xác dịnh đa thức P(x) thõa mãn điều kiện

**P(1)=2, P(2)=5, P(3)=12**

Nếu chúng ta không hạn chế về bậc của đa thức P(x) thì sẽ tồn tại vô số các đa thức P(x) thõa mãn điều kiện

P(1)=2, P(2)=5, P(3)=12.

Đó là vì nếu chúng ta tìm ra được một đa thức P(x) thoã mãn điều kiện này thì chúng ta có thể tạo ra vô số các đa thức G(x) khác cũng thõa mãn điều kiện trên bằng cách cho

G(x) = P(x)+(x−1)(x−2)(x−3)H(x),

và chúng ta có

G(1) = P(1), G(2) = P(2), G(3) = P(3).

Nếu chúng ta hạn chế về bậc của đa thức và yêu cầu rằng đa thức P(x) phải có bậc bé thua hoặc bằng 2 thì sẽ tồn tại duy nhất một đa thức P(x) có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 thõa mãn điều kiện

P(1)=2, P(2)=5, P(3)=12.

Lý do là vì nếu G(x) là một đa thức khác có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 thõa mãn điều kiện

G(1)=2, G(2)=5, G(3)=12,

thì chúng ta lấy

D(x)=G(x)−P(x),

D(x) là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 thõa mãn

D(1)=D(2)=D(3)=0,

điều này chứng tỏ D(x) có đến 3 nghiệm, trong khi bậc của nó thì nhỏ hơn hoặc hằng 2, vậy D(x) phải là đa thức hằng số 0. Do đó G(x)=P(x), điều này chứng minh là chỉ tồn tại duy nhất một đa thức P(x).

Ta tiến hành tìm đa thức P(x) như sau :

Đầu tiên, nếu chúng ta chỉ có một điều kiện là **P(1)=2** thì chúng ta có xác định được đa thức P(x) hay không? Hiển nhiên, đa thức đơn giản nhất thõa mãn điều kiện là đa thức hằng số **A(x)=2**.

Tiếp đến, nếu chúng ta muốn tìm đa thức B(x) để cho **B(1)=2** và **B(2)=5**, thì chúng ta có thể xem xét đa thức có dạng

**B(x)=A(x)+α(x−1)=2+α(x−1)**

Dạng ở trên rất là thuận lợi bởi vì chúng ta có ngay được là **B(1)=A(1)=2**. Còn **B(2)=2+α**, vậy để B(2)=5 chúng ta sẽ chọn α=3, và cuối cùng chúng ta có

**B(x)=2+3(x−1)**

Bây giờ, tương tự như trên, muốn tìm đa thức P(x) để cho P(1)=2, P(2)=5, và P(3)=12, chúng ta xem xét đa thức có dạng

P(x)=B(x)+α(x−1)(x−2)=2+3(x−1)+α(x−1)(x−2)

Bởi vì P(x)=B(x)+α(x−1)(x−2), chúng ta có ngay được rằng

P(1)=B(1)=2, P(2)=B(2)=5.

Còn P(3)=8+2α. Để P(3)=12 thì α=2, và chúng ta có

P(x)=2+3(x−1)+2(x−1)(x−2)

Tóm lại chúng ta đã tìm ra đa thức thõa mãn điều kiện

P(1)=2, P(2)=5, P(3)=12.

Đó là

P(x)=2+3(x−1)+2(x−1)(x−2)

Khai triển ra, chúng ta có được chính đa thức ban đầu ở trên, đó là

P(x)=2+3(x−1)+2(x−1)(x−2)= 2−3x+3

***Định lí :*** **Nếu x0,x1,x2,…,xn là n+1 số thực khác nhau. Và y0,y1, y2, …, yn, là n+1 số thực bất kỳ. Thì sẽ tồn tại duy nhất một đa thức P(x) có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n thõa mãn điều kiện**

**P(x0)=y0, P(x1)=y1,…, P(xn-1)=yn-1, P(xn)=yn.**

**Định lý trên nói rằng một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n sẽ được xác định một cách duy nhất bằng n+1 giá trị của nó.**

Theo công thức nội suy Newton , đa thức P(x) sẽ có dạng :

**P(x)= α0 + α1 (x – x0) + α2(x – x0)(x – x1) +…+ αn(x – x0 )(x – x1)…(x – xn-1)**

Nếu chúng ta thay x=x0 vào công thức nội suy Newton, thì chúng ta sẽ xác định được giá trị của hệ số α0. Tiếp đó, nếu chúng ta thay x=x1 vào công thức nội suy thì chúng ta sẽ xác định được giá trị của hệ số α1. Tương tự như vậy, hệ số cuối cùng αn sẽ được xác định nếu chúng ta thay x=xn.

**II.Tại sao phải xây dựng đa thức nội suy Newton ?**

Cách xây dựng đa thức nội suy Lagrange khá đơn giản về mặt ý tưởng. Tuy nhiên nhược điểm của nó là mỗi lần bổ sung thêm một số điểm quan sát mới ta lại phải tính lại từ đầu.

Newton tìm cách xây dựng một đa thức nội suy sao cho khi bổ sung các điểm quan sát thì ta không phải tính lại phần đa thức đã có.

Giả sử từ n+1 mốc nội suy đã cho ( như định lí đã phát biểu ), ta tính được đa thức:

P(x)= α0 + α1 (x – x0) + α3(x – x0)(x – x1) +…+ αn(x – x0 )(x – x1)…(x – xn-1)

Ta thêm vào một mốc nội suy mới là **f(xn+1) = yn+1 ,** như vậy ta sẽ tìm đa thức nội suy mới G(x) bằng cách cho:

G(x) = P(x) + αn+1(x – x0)(x – x1)…(x – xn)

và thay x = xn+1

Việc tìm đa thức G(x) qui về tìm đa thức :

G(x)-P(x)= αn+1 (x – x0 )(x – x1)…(x – xn)

mà ta không phải thao tác lại từ đầu.

**Bài toán :**

Cho hàm số f(x) thỏa mãn :

f(xi) = yi ; i =  ; x ;

a  x0 < x1 < x2 < x3 ... < xn b

Tính f(c) với c 

**III. Cách xây dựng đa thức nội suy Newton**

*Để xây dựng đa thức P(x) ta cần tìm các hệ số αi với i = . Trước hết Newton xây dựng tỷ hiệu của hàm số, từ đó đưa ra công thức tính gần đúng cho f(c)*

***1.Tỷ hiệu***

Xét hàm số f(x) với x ;

Từ bảng số:

f(xi) = yi ; i =  ;

a  x0 < x1 < x2 < x3 ... < xn b

***Ta gọi*** f=; i =  là tỷ hiệu cấp 1 của hàm f(x)

Tỷ hiệu của tỉ hiệu cấp 1 là tỷ hiệu cấp 2, kí hiệu là

 ;.....

Tỷ hiệu của tỉ hiệu cấp n-1 là tỷ hiệu cấp n kí hiêu là



Tỷ hiệu các cấp được miêu tả qua bảng sau :

***Bảng 1***

|  |  |
| --- | --- |
| x | f(x) f f f |
| x0  x1  x2  x3  ....  xn-2  xn-1  xn | f(x0)    f(x1)    f(x2)    f(x3)  ..... ..........  f(xn-2)    f(xn-1)    f(xn) |

***2.Các tính chất của tỉ hiệu***

Tính chất 1 :

a, Tỉ hiệu cấp k của hàm số f và g bằng tổng các tỉ hiệu cùng cấp



Chứng minh:

* Xét k=1 :



= 

* Tính chất đúng với k=1

Giả sử tính chất kia đúng với k ta phải chứng minh nó đúng với k+1

Thật vậy. Khi tính chất thỏa mãn với k ta có :



Thay i=i+1 :



Với k+1 ta có:



= 

= 

=  => đpcm

b, Hằng số c được đưa ra ngoài dấu tỉ hiệu



Chứng minh : thay g(x) ở trên bằng f(x), làm liên tục c lần

Tính chất 2: Tỉ hiệu các cấp có tính chất đối xứng



Chứng minh:

Xét k=1 ta có 

Giả sử tính chất trên đúng với k ta phải chứng minh nó đúng với k+1

Thật vậy.Do tính chất đúng với k nên :



Thay i=i+1 ta có :



Với k + 1 ta có :



= 

= => đpcm

Tính chất 3:

a,Tỉ hiệu của hằng số thì bằng 0

b,Tỷ hiệu cấp m của đa thức bậc n có tính chất :

* Nếu m=n thì tỉ hiệu cấp n là hằng số
* Nếu m>n thì tỉ hiệu cấp n bằng 0

Chứng minh:

a, Nếu f(x) = C(const) thì:



b,Nếu :

f(x) = a0+a1+a2+....an (an 0 )

Xét hàm h(x) =  k ***N***

Ta có: 

Là đa thức cấp k-1.Áp dụng tính chất 1 và xét tỉ hiệu cấp 2 ta được đa thức cấp k-2.

Sau k lần thì được tỉ hiệu cấp k của hàm h(x) =  là hằng số ,và tỉ hiệu cấp k+1

thì bằng 0

Áp dụng tính chất 1 đối với đa thức f(x) ta được đpcm

***3.Đa thức nội suy Newton***

Từ bảng 1 : với các mốc nội suy xi  , Newon đưa thêm vào mốc  bất kỳ gần x0 và tính

 (2)

Lại có

 (3)

Thay (3) vào (2) ta được :



Lặp lại quá trình trên với tỉ hiệu cấp 3,4….cuối cùng ta được:

+….

+  (4)

Trong đẳng thức (4) nếu đặt :

+…

+  và

=  thì

***f(x)*** = 

Ta thấy là đa thức bậc n sinh ra từ ***bảng 1*** mà :

 với  nên  với 

*  chính là đa thức nội suy cần tìm

 còn được gọi là đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x0

Nếu các mốc nội suy được đánh dấu ngược lại theo thứ tự :



Thì  sẽ có dạng :

+…+ hay còn gọi là đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ xn

Hai công thức nội suy tiến và lui đều xuất phát từ ***bảng 1***

Dễ thấy hai công thức trên à như nhau, khi cần tính giá trị đa thức tại điểm c nào đó , nếu c gần x0 ta dùng công thức tiến còn gần xn ta dùng công thức lùi

***4.Sai số***

=

= 

Là công thức sai số chung cho cả công thức tiến và lùi

Do việc đưa ra  là duy nhất chỉ phụ thuộc vào các mốc nội suy cho sẵn nên phương pháp này không có sự hội tụ

**IV.Thuật toán**

- Input : xj ; f(xj) ; j =  Với : x0 < x1 < x2 < x3 ... < xn

Giá trị của c với f(c) là giá trị cần tìm

Ta lập bảng sau :

|  |  |
| --- | --- |
| x | y |
| x0  x1  x2  x3  .....  xj  xj+1  ....  xn | y(0,0)  y(0,1) y(1,1)  y(0,2) y(1,2) y(2,2)  y(0,3) y(1,3) y(2,3) y(3,3)  ...................................................  ....................................... y(i,j)....................  ........................................y(i,j+1) y(i+1,j+1) ...  ..............................................................................................  y(0,n) y(1,n) y(2,n) y(3,n) …............................................. y(n,n) |

Trong đó :

y(0,j) = f(xj) ; j = 

y(i,j) =  ; i =  ; j = 

- Output : P(x) = 

 ;

f(c) = P(c)